المحاضرة الثانية عشرة

مثال

ليكن لدينا المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

اثبت ان جميع النوى المكررة التابعة للفرق $x-T$ فقط ثم اوجد حل المعادلة بالاعتماد على التابع الحال ؟

الحل:

$$K_1(x,T) = K(x,T) = K(x-T)$$

$$K_n(x,T) = \int_T^x K_{n-1}(x-T_1)\, K(T_1-T)\, dT_1 \qquad n=2,3,\dots$$

$$K_2(x,T) = \int_T^x K(x-T_1)\, K(T_1-T)\, dT_1$$

فنبدل T_1 بـ $\tau = T_1 - T$ حيث نحصل

$$T_1 = T \Rightarrow \tau = 0 \qquad T_1 = T + \tau$$

$$T_1 = x \Rightarrow \tau = x - T$$

$$K_2(x,T) = \int_0^{x-T} K(x-T-\tau)\, K(\tau)\, d\tau$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة ان $K_2(x,T)$ يتعلق بالفرق $x-T$

$$R(x,T,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,T)\, \lambda^n =$$

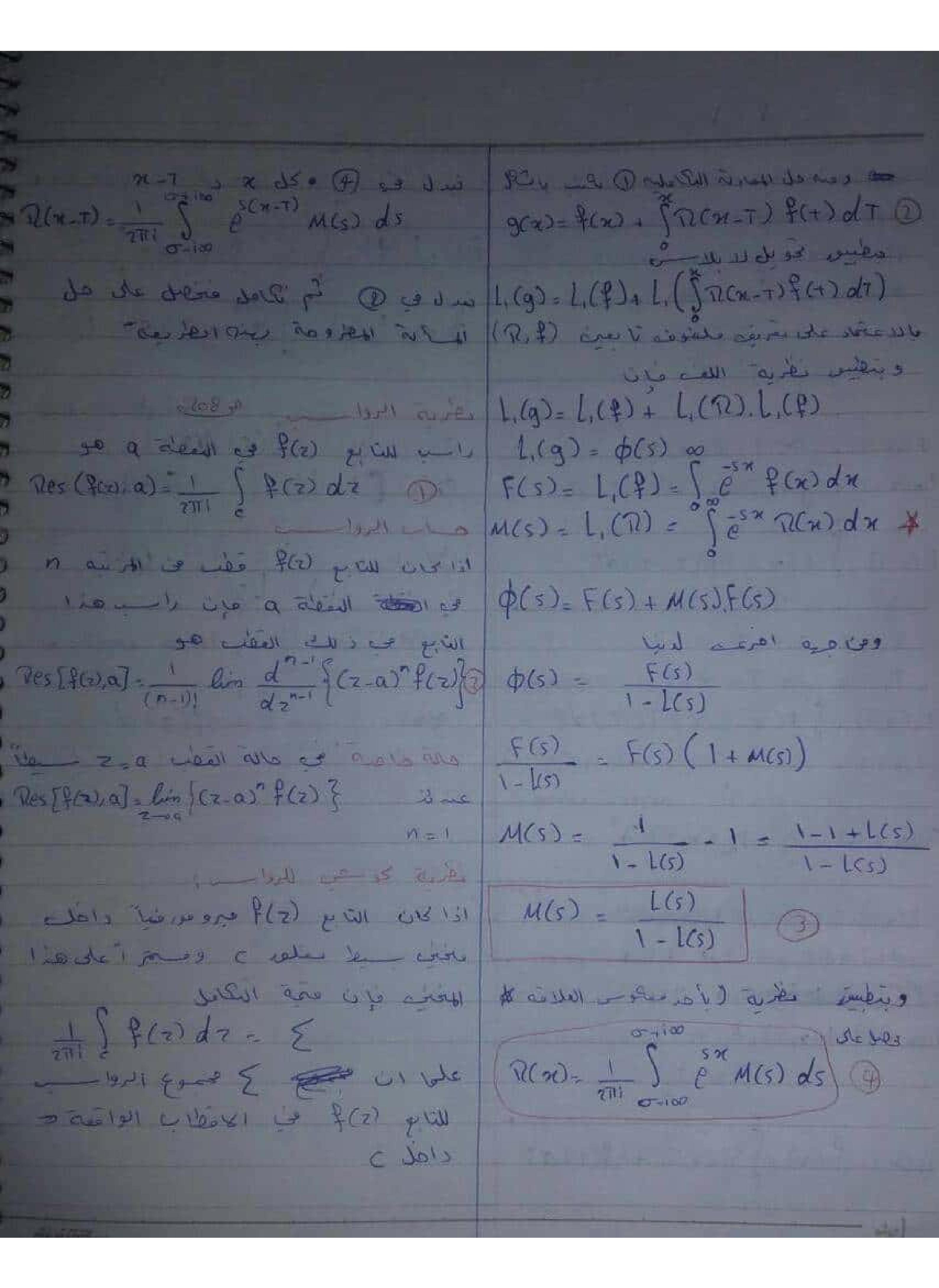
$$= K_1(x,T) + \lambda K_2(x,T) + \lambda^2 K_3(x,T) + \dots$$

بوضع $\lambda = 1$ فإن تابع الحال لا يتعلق الا بالفرق $x-T$

$$R(x,T,1) = K_1(x-T) + K_2(x-T) + K_3(x-T) + \dots = R(x-T)$$

ومنه نجد

$$g(x) = f(x) + \int_0^x R(x,T,\lambda)\, f(T)\, dT$$



وبحل المعادلة التكاملية ① نجد بأن

$$g(x) = f(x) + \int_0^x \Omega(x-T)\, f(t)\, dT \quad ②$$

نطبق تحويل لابلاس

$$L(g) = L(f) + L\left(\int_0^x \Omega(x-T)\, f(t)\, dT\right)$$

بالاعتماد على تعريف ملفوف تابعين (Ω, f)

وبتطبيق نظرية اللف فإن

$$L(g) = L(f) + L(\Omega).L(f)$$

$$L(g) = \phi(s)$$

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$M(s) = L(\Omega) = \int_0^\infty e^{-sx}\, \Omega(x)\, dx \quad *$$

$$\phi(s) = F(s) + M(s).F(s)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1-L(s)}$$

$$\frac{F(s)}{1-L(s)} = F(s)\left(1 + M(s)\right)$$

$$M(s) = \frac{1}{1-L(s)} - 1 = \frac{1-1+L(s)}{1-L(s)}$$

$$\boxed{M(s) = \frac{L(s)}{1-L(s)}} \quad ③$$

وبتطبيق نظرية لابلاس معكوس العلاقة * نحصل على

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\, M(s)\, ds \quad ④$$

نبدل في ④ كل x بـ $x-T$

$$\Omega(x-T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s(x-T)}\, M(s)\, ds$$

نبدل في ② ثم نكامل فنحصل على حل المسألة المطروحة بصورة نهائية

نظرية الرواسب (ص 108)

راسب للتابع $f(z)$ في النقطة a هو

$$Res(f(z), a) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\, dz \quad ①$$

حساب الرواسب

اذا كان للتابع $f(z)$ قطب من المرتبة n في النقطة a فإن راسب هذا التابع في ذلك القطب هو

$$Res[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z-a)^n f(z)\right\} \quad ②$$

حالة خاصة في حالة القطب $z=a$ بسيط

$$Res[f(z), a] = \lim_{z \to a}\left\{(z-a)^n f(z)\right\}$$

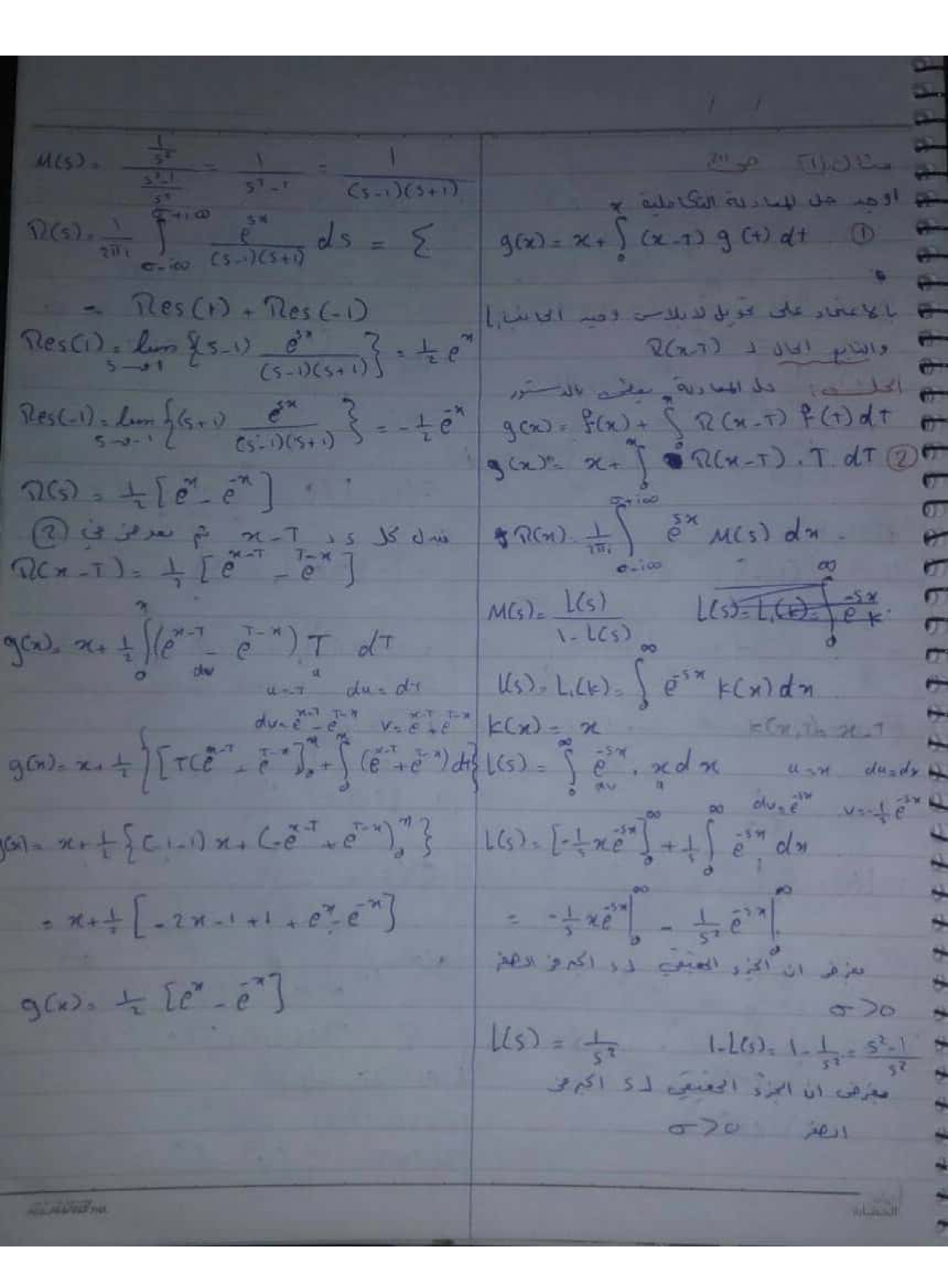
عند $n = 1$

نظرية كوشي للرواسب

اذا كان التابع $f(z)$ هولومورفياً داخل منحني بسيط مغلق c ومستمراً على هذا المنحني فإن قيمة التكامل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\, dz = \sum$$

علماً ان $\sum$ مجموع الرواسب للتابع $f(z)$ في الاقطاب الواقعة داخل c



مثال (1) ص 211

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = x + \int_0^x (x-t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

بالاعتماد على تحويل لابلاس اوجد الحل الاساسي والنواة الحالة لـ $R(x-T)$

الحل: حل المعادلة يعطى بالدستور

$$g(x) = f(x) + \int_0^x R(x-T)\, f(t)\, dt$$

$$g(x) = x + \int_0^x R(x-T)\, .T\, dT \quad (2)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} M(s)\, dx$$

$$M(s) = \frac{L(s)}{1-L(s)}$$

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^\infty e^{-sx} k(x)\, dx$$

$k(x) = x$ $\qquad k(x,T) = x-T$

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} . x\, dx \qquad u = x \quad du = dx \qquad dv = e^{-sx} \quad v = -\frac{1}{s}e^{-sx}$$

$$L(s) = \left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\, dx$$

$$= -\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\Big|_0^\infty$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من الصفر $\sigma > 0$

$$L(s) = \frac{1}{s^2} \qquad 1-L(s) = 1-\frac{1}{s^2} = \frac{s^2-1}{s^2}$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من الصفر $\sigma > 0$

$$M(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2-1}{s^2}} = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-1)(s+1)}\, ds = \Sigma$$

$$= Res(1) + Res(-1)$$

$$Res(1) = \lim_{s\to 1}\left\{(s-1)\frac{e^{sx}}{(s-1)(s+1)}\right\} = \frac{1}{2}e^{x}$$

$$Res(-1) = \lim_{s\to -1}\left\{(s+1)\frac{e^{sx}}{(s-1)(s+1)}\right\} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$R(s) = \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]$$

نبدل كل x بـ $x-T$ ثم نعوض في (2)

$$R(x-T) = \frac{1}{2}\left[e^{x-T} - e^{T-x}\right]$$

$$g(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (e^{x-T} - e^{T-x})\, T\, dT$$

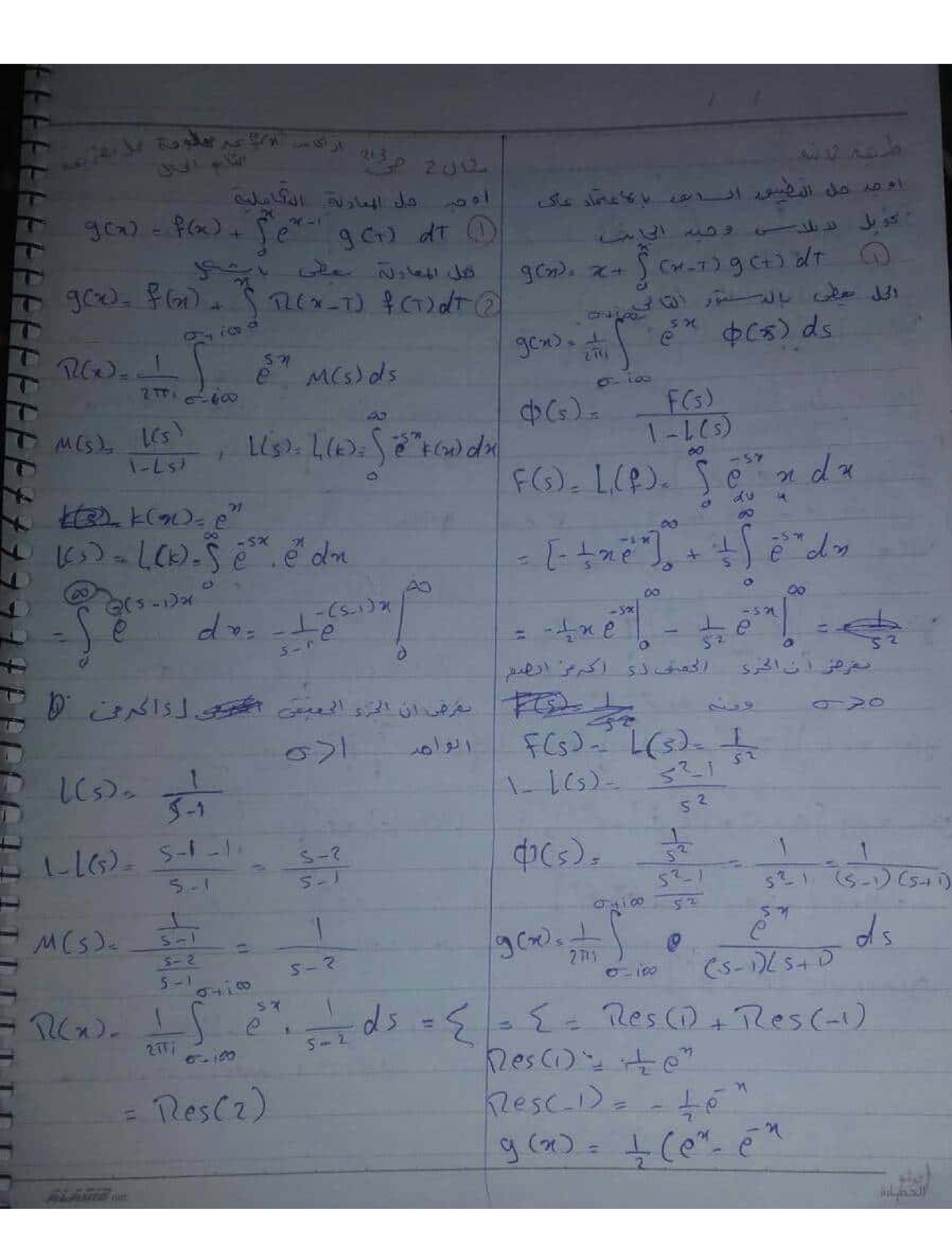
$u = T \quad du = dT \qquad dv = e^{x-T} - e^{T-x} \quad v = e^{x-T} + e^{T-x}$

$$g(x) = x + \frac{1}{2}\left\{\left[T(e^{x-T} + e^{T-x})\right]_0^x + \int_0^x (e^{x-T} + e^{T-x})\, dt\right\}$$

$$g(x) = x + \frac{1}{2}\left\{(1-1)x + (-e^{x-T} + e^{T-x})_0^x\right\}$$

$$= x + \frac{1}{2}\left[-2x - 1 + 1 + e^{x} - e^{-x}\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]$$



طريقة ثانية

اوجد حل التطبيق السابق بالاعتماد على تحويل لابلاس وحيد الجانب

$$g(x) = x + \int_0^x (x-T)\, g(T)\, dT \quad (1)$$

الحل يعطى بالدستور التالي

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\, \phi(s)\, ds$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1-L(s)}$$

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-sx}\, x\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\, dx$$

$$= -\frac{1}{s} x e^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2} e^{-sx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من الصفر $\sigma > 0$

$$F(s) = L(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$1 - L(s) = \frac{s^2-1}{s^2}$$

$$\phi(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2-1}{s^2}} = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-1)(s+1)}\, ds$$

$$= \sum = Res(1) + Res(-1)$$

$$Res(1) = \frac{1}{2} e^{x}$$

$$Res(-1) = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

مثال 2 ص 213

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-T}\, g(T)\, dT \quad (1)$$

حل المعادلة يعطى بالشكل

$$g(x) = f(x) + \int_0^x R(x-T)\, f(T)\, dT \quad (2)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\, M(s)\, ds$$

$$M(s) = \frac{L(s)}{1-L(s)}, \quad L(s) = L(k) = \int_0^\infty e^{-sx} k(x)\, dx$$

$$k(x) = e^{x}$$

$$L(s) = L(k) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-1)x}\, dx = -\frac{1}{s-1} e^{-(s-1)x}\Big|_0^\infty$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من الواحد $\sigma > 1$

$$L(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$1 - L(s) = \frac{s-1-1}{s-1} = \frac{s-2}{s-1}$$

$$M(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{s-2}{s-1}} = \frac{1}{s-2}$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} \cdot \frac{1}{s-2}\, ds = \sum$$

$$= Res(2)$$

$$Res\,2 = \lim_{s \to 2} \left\{ (s-2) \frac{e^{sx}}{s-2} \right\} = e^{2x}$$

$$\Omega(x) = e^{2x}$$

$$\Omega(x-T) = e^{2(x-T)}$$

نبدل في ② نحصل على المطلوب

$$g(x) = f(x) + \int_0^x e^{2(x-T)} f(T)\, dT$$

حيث اذا كان $f(x) = e^{2x}$

$$g(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{2(x-T)} e^{2T}\, dT$$

$$= e^{2x} + e^{2x} x$$

مثال ③ ص 215

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-T)\, e^{x-T} g(T)\, dT \quad ①$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} \Phi(s)\, ds \quad ②$$

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)}$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^\infty e^{-sx} e^{2x}\, dx = \int_0^\infty e^{-(s-2)x}\, dx = \frac{-1}{s-2} e^{-(s-2)x} \Big|_0^\infty$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من 2

$\sigma > 2$

$$F(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$k(x) = x e^{x}$$

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^\infty e^{-sx} \underbrace{e^{x} x}_{k(x)}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-1)x} x\, dx \qquad u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-(s-1)x},\ v = \frac{-1}{s-1} e^{-(s-1)x}$$

$$L(s) = \frac{-1}{s-1} e^{-(s-1)x} \cdot x \Big|_0^\infty + \frac{1}{s-1} \int_0^\infty e^{-(s-1)x}\, dx$$

$$L(s) = \frac{-1}{s-1} x e^{-(s-1)x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{(s-1)^2} e^{-(s-1)x} \Big|_0^\infty$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من الواحد

$\sigma > 1$

$$L(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$1 - L(s) = 1 - \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{(s-1)^2 - 1}{(s-1)^2}$$

$$L(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad F(s) = \frac{1}{s-2}$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من 2 اي $\sigma > 2$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{s-2}}{\frac{(s-1)^2 - 1}{(s-1)^2}}$$

$$= \frac{(s-1)^2}{(s-2)[(s-1)^2 - 1]} = \frac{(s-1)^2}{(s-2)(s-2)s}$$

$$= \frac{(s-1)^2}{s(s-2)^2}$$

نبدل في ② نجد

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(s-1)^2 e^{sx}}{s(s-2)^{2}}\, dx = \Big\{$$

$$= Res(0) + Res(2)$$

قطب مضاعف

$$Res(0) = \lim \Big\{ s \frac{(s-1)^2 e^{sx}}{(s-2)^2 s} \Big\} = \frac{1}{4}$$

~~Res(2) = lim~~

$$Res(2) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to 2} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s-2)^2 (s-1)^2 e^{sx}}{s(s-2)^2} \right]$$

$$= \lim_{s \to 2} \frac{\left[2(s-1) e^{sx} + (s-1)^2 x e^{sx} \right] s - (s-1)^2 e^{sx}}{s^2}$$

$$= \frac{\left[2e^{2x} + x e^{2x} \right] 2 - e^{2x}}{4}$$

$$= e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$= \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{1}{4}$$

دورة أوجد حل المعادلة التكاملية التالية

$$g(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-\tau)} \sin(x-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$